28-11-18

$a_n \le b_n$, ξ οσ της $\{a_n\}$, λ οσ της $\{b_n\}$
$\Rightarrow \xi \le \lambda$

$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττος} \\ 1/2, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$ $\qquad b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ 1, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ ρητός} \\ x+3, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$

→ Να βρεθούν όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής

· Έστω $\xi \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, τω $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$
$f(a_n) = 2a_n \to 2\xi$
$f(b_n) = b_n + 3 \to \xi + 3$
f συνεχής στο $\xi \Leftrightarrow (\forall \{x_n\}$ τω $x_n \to \xi \Rightarrow f(x_n) \to f(\xi))$
Άρα αν f συνεχής στο $\xi \Rightarrow 2\xi = \xi + 3$. Άρα $\forall\, \xi \ne 3$ η f είναι ασυνεχής στο ξ, είναι η f συνεχής στο $\xi = 3$?
Έστω $\{x_n\}$, τω $x_n \to \xi$
$A_1 = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in \mathbb{Q}\}$, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$
Αν A_1 άπειρο, τότε $\forall$ γν αύξουσα ακολουθία $\{a_n\} \subseteq A$,
$\{x_{k_n}\} \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_{k_n}) = 2x_{k_n} \to 2\xi$
$\{x_{k_n}\} \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_{k_n}) = x_{k_n} + 3 \to \xi + 3)^*$
Αν A_2 *
Αν $A_1 \ne A_2$ πεπερασμένα τότε το συμπέρασμα είναι τετριμμένο
Επειδή $2\xi = \xi + 3 \Leftrightarrow \xi = 3 \Rightarrow \forall\, \{x_n\}$ τω $x_n \to 3$, $f(x_n) \to 6$
$\Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 6$

$\Rightarrow f$ είναι συνεχής στο 3 και ασυνεχής παντού αλλού.

Ορισμός

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, τω $\exists k \in (0,+\infty)$, $\forall x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| \le k|x-y|$

f λέγεται συνάρτηση Lipschitz με σταθερά k

Απόδειξη

1ος τρόπος -> νδο η f είναι στο A

Έστω $\xi \in A$ Θδο f συνεχής στο ξ

Έστω $\{x_n\} \subseteq A$, τω $x_n \to \xi \Rightarrow |f(x_n) - f(\xi)| \le k|x_n - \xi| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow f(x_n) \to f(\xi) \Rightarrow$ f συνεχής στο ξ

2ος τρόπος -> Αφού $x_n \to \xi$, για $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall n \ge n_0$

$|x_n - \xi| < \varepsilon/k \Rightarrow |f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(\xi)$

3ος τρόπος -> Έστω $\varepsilon > 0$. Διαλέγω $\delta = \varepsilon/k \Rightarrow \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap A$, $|f(x) - f(\xi)| \le k|x - \xi| \le k|x-\xi| < \delta k = \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon$

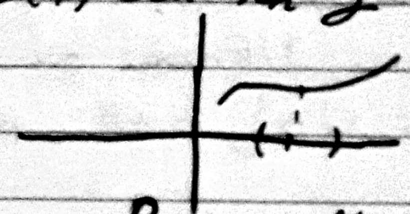
Ιδιότητες

1) Έστω f συνεχής (εκ δεξιών κ' εξ αριστερών) στο ξ. Αν $f(x) > 0$ (<0), τότε $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap A$

$x \in [\xi, \xi + \delta)$ $(x \in (\xi - \delta, \xi])$, να ισχύει $f(x) > 0$ (<0)

f συνεχής στο ξ αν $\forall \{x_n\} \subseteq D(f)$ τω $x_n \to \xi$

$f(x_n) \to f(\xi)$, $\xi \in D(f)$

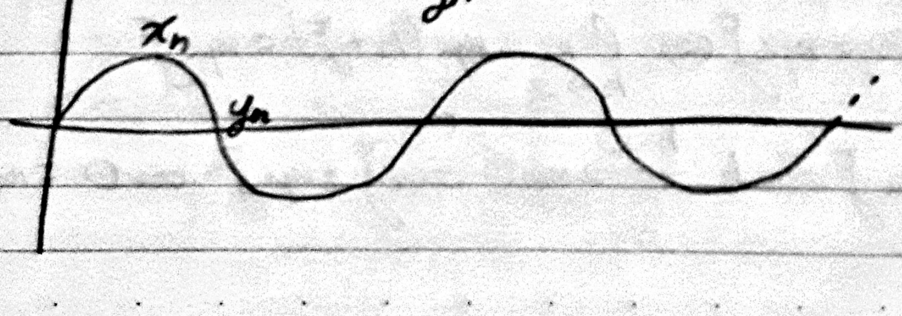


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Αν $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty \underset{\text{όχι}}{\overset{?}{\Longrightarrow}} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

$f(x) = ημx$

$x_n = 2κπ + π/2$

$y_n = 2κπ$



2) f, g συνεχής στο $\xi \in D(f) \cap D(g)$
$\Rightarrow f+g, f-g, f \cdot g, |f|$ συνεχείς στο ξ και f/g συνεχείς στο ξ αν $g(\xi) \neq 0$

3) $\min\{f,g\} = f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$
$\max\{f,g\} = f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$

4) $f(x) = c$ συνεχής συνάρτηση

Έστω $f: A \xrightarrow[\neq \emptyset]{\subseteq \mathbb{R}} B \subseteq \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ ($g \circ f$ ορίζεται) και f συνεχίζεται $\xi \in A$, g συνεχείς στο $f(\xi)$ τότε, $g \circ f$ συνεχής στο ξ

Απόδειξη
Έστω $\{x_n\} \subseteq A$, τω. $x_n \to \xi \Rightarrow f(x_n) \to f(\xi) \Rightarrow$
$g(f(x_n)) \to g(f(\xi))$
$\;\; (g \circ f)(x_n) \quad (g \circ f)(\xi)$

Παραδείγματα συνεχών
1) πολυώνυμα, 2) Ρητές συναρτήσεις, 3) x^a, $x>0$, $a \in \mathbb{R}$, 4) τριγωνομετρικές, 5) a^x, $a>0$, 6) $\log_a x$

$\rightarrow$ ημx : συνεχής
$x=0$ $\quad 0 \leq$ ημ$x \leq |x| \Rightarrow \lim_{x \to 0}$ ημ$x = 0 =$ ημ0

$x = \xi$ Θδο $\lim_{x \to \xi}$ ημ$x =$ ημ$\xi \Leftrightarrow \lim_{h \to 0}$ ημ$(h+\xi) =$ ημξ

ημ$(h+\xi) =$ ημhσυν$\xi +$ ημξσυν$h \xrightarrow{h \to 0} \cancel{\text{ημ}}0 \cdot$ συν$\xi +$ ημ$\xi \cdot$ συν$0 =$ ημξ
Θδο $\lim_{h \to 0}$ συν$h = 1$

$\sigma\upsilon\nu h = \sqrt{1-\eta\mu^2 h}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\Rightarrow$ ημx συνεχής στο $\mathbb{R}$

συνx " " "

εφx " " "

log " " $(0,+\infty)$

$\xi = 1$ $\quad 1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$ (x κοντά στο 1)

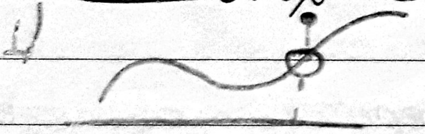
$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \log x = 0$$

Έστω $\{a_n\} \subseteq (0,+\infty)$, τω $a_n \to \xi \in (0,+\infty)$

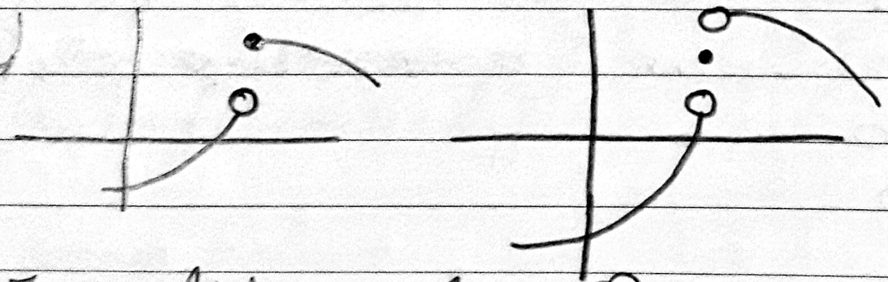
$$\Rightarrow \frac{a_n}{\xi} \to 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a_n}{\xi}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (\log a_n - \log \xi) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log a_n = \log \xi$$

Είδη ασυνέχειας

1)  $\exists \lim_{x\to\xi} f(x)$ αλλά $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$

Εξουδετερώσιμη ασυνέχεια

2) 

$\exists \lim_{x\to\xi^-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικά

3) Ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $\nexists$

ουσιώδεις ασυνέχεια

$a_n = \frac{1}{2\pi \cdot n}$, $b_n = \frac{1}{2\pi \cdot n + \frac{\pi}{2}} > 0$

$f(a_n)=0 \to 0$ (Ομοίως και $x \to 0^-$)
$f(b_n)=1 \to 1$
$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) \nexists$

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$ τω. $f(x)=0$, $x \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \cap [0,1]$
$f(x)=\frac{1}{q}$, $x=\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, $\frac{p}{q}$ ανάγωγο

$\frac{p}{q} \in [0,1]$

νδο f συνεχής σε κάθε άρρητο σημείο του $[0,1]$
και ασυνεχής σε κάθε ρητό σημείο του $[0,1]$

Λύση

Έστω $\xi \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$ και $\{x_n\} \subseteq (0,1] \cap (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ τω $x_n \to \xi$
$\Rightarrow f(x_n)=0 \to 0 \neq f(\xi) \Rightarrow f$ ασυνεχής στο ξ
Έστω $\xi \in [0,1] \cap (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ και $\{x_n\} \subseteq [0,1]$ τω. $x_n \to \xi$

1) $f(x)=\begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 3, & x=0 \end{cases}$ Εξουδετερώσιμη ασυνέχεια

2) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x>1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} ημ(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Θδο $f(x_n) \to f(\xi)=0$
Έστω ότι $f(x_n) \not\to 0 \Rightarrow \exists \{x_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$
και $\varepsilon>0$ τω. $f(x_{k_n})=\varepsilon>\frac{1}{v}$, $\forall v \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_{k_n} \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\exists v \in \mathbb{N}$, τω $\varepsilon > 1/v$)
$\boxed{\frac{1}{v}, \frac{2}{v}, \dots, \frac{v-1}{v}}, \frac{v}{v}, \frac{v+1}{v}, \dots \to f(x_n) \to 0 = f(\xi)$

$\Rightarrow x_{k_n} \in \{\frac{1}{\nu}, \dots, \frac{\nu-1}{\nu}\}, \forall n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{k_n} \in \mathbb{Q}$

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής

$\Rightarrow \exists x_\mu, x_M \in [a,b]$ τ.ω. $f(x_\mu)=\min\{f(x): x\in[a,b]\}$

$f(x_M)=\max\{f(x): x\in[a,b]\}$

Αν $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=1/x$, τότε η f δεν είναι άνω φραγμένη

Απόδειξη

1ο Βήμα: f φραγμένη

Έστω ότι f δεν είναι άνω φραγμένη $\Rightarrow \forall k>0, \exists x_k \in [0,1]$ τ.ω. $f(x_k)>k$. Παίρνω $k:n \Rightarrow \exists x_n \in [a,b]$ τ.ω. $f(x_n)>n \Rightarrow f(x_n)\to\infty$.

Όμως, $\{x_n\}$ φραγμένη (ομοίως για κάτω φραγμένη)

Θέτω $M=\sup\{f(x): x\in[0,1]\} \in \mathbb{R}$ γιατί f είναι άνω φραγμένη (ομοίως για το inf)

Γνωρίζουμε ότι είτε $M \in \{f(x): x\in[a,b]\}$ (οπότε $M=\max\{f(x): x\in[a,b]\}$, οπότε τελειώσαμε)

$M \notin \{f(x): x\in[a,b]\} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq [a,b]$ τ.ω. $f(x_n)\to M$ όμως από Bolzano-Weierstrass $\exists \{x_{k_n}\}, \exists \xi \in [a,b]$ τ.ω. $x_{k_n}\to\xi \xRightarrow{\text{συνεχ}}$ $f(x_{k_n})\to f(\xi) \Rightarrow M=f(\xi)$

Θεώρημα Bolzano

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. $f(a)f(b)<0$ ($f(a)f(b)\le 0$)

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ ($[a,b]$) $: f(\xi)=0$

Θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς, τότε η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ της $\min f(x), \max f(x), x\in[a,b] \Leftrightarrow$ $f([a,b])=[\min f(x), \max f(x)]$

Η εικόνα ενός κλειστού και φραγμένου διαστήματος μέσω της f είναι κλειστό διάστημα

Απόδειξη ΘΕΤ.

Θέτω $m=\min f(x)$, $M=\max f(x)$, $x\in[a,b]$.
Έστω $k\in(m,M)$
Θέτω $g(x)=f(x)-k$ (Μπορούμε να υποθέσουμε στο Θ.)
$\exists x_m\in[a,b]$, τω $f(x_m)=m$
$\exists x_M\in[a,b]$, τω $f(x_M)=M$
$g(x_m)<0$
$g(x_M)>0$
$\Rightarrow g(x_m)g(x_M)<0$
Άρα, από Θ.Β. $\exists \xi$ μεταξύ των x_m, x_M, τω $g(\xi)=0 \Leftrightarrow$
$f(\xi)=k$

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ πολ/μο περιττού βαθμού τότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, ειδικότερα η $f(x)$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα

Λύση

$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, όπου $a_n\neq 0$ και n: περιττός. Υποθέτουμε ότι $a_n>0$ τότε $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)$

$=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Για νδο $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ πρέπει αν $k\in\mathbb{R}$ νδο $\exists x_k\in\mathbb{R}$, τω $f(x_k)=k$
Έστω $M>0$, f όχι άνω φραγμένη $\Rightarrow \exists y\in\mathbb{R}$ τω $f(y)>M$

f όχι κάτω φραγμένη $\Rightarrow \exists y_2\in\mathbb{R}$, τω $f(y_2)<-M$
Διαλέγω M τω $|k|<M \Rightarrow f(y_2)<-M<k<M<f(y)$
Από ΘΕΤ $\exists x$ μεταξύ των x_1, x_2 τω $f(x)=k$